Ministerio de Desarrollo Social

Gobierno de Chile

CURSO E-LEARNING

# MATEMÁTICAS FINANCIERAS

# Contenido

## 1. Objetivos

A través de los siguientes capítulos, entraremos en el mundo de las matemáticas financieras, con el fin de que el alumno, al finalizar el curso, conozca el instrumental cuantitativo de análisis que le permita evaluar distintos tipos de proyectos. Más específicamente, los objetivos de este curso son:

- Conocer el concepto de Matemática Financiera.
- Aprender y operar con los siguientes conceptos: Valor del Dinero en el Tiempo, Interés Simple e Interés Compuesto, Valor Actual y Valor Futuro, Tasa de Interés Equivalente, Anualidades e inflación.
- Saber cómo decidir sobre la conveniencia de realizar un proyecto.
- Ser capaz de optar por el proyecto más conveniente dentro de una cartera de proyectos.
- Profundizar en las fórmulas de cálculo para aplicar estos criterios de inversión.

## 2. Matemática Financiera

Las matemáticas financieras, son una aplicación de las matemáticas que conocemos comúnmente, en la asignación de recursos a lo largo del tiempo y en condiciones de incertidumbre[1]. Así, podemos utilizar estas herramientas para evaluar diferentes proyectos bajo distintos escenarios y elegir el que más nos convenga.

> Por ejemplo: Si queremos construir un nuevo hospital, ¿Cómo sabemos qué alternativa de diseño es más conveniente? ¿Cómo afecta al valor del proyecto si a mitad del mismo nos damos cuenta de que necesitamos más empleados para la construcción? Todas estas preguntas las podemos resolver antes de comenzar el proyecto, aplicando sencillos modelos de matemática financiera.

A pesar de que su uso más común es en la evaluación de proyectos, las matemáticas financieras han sido utilizadas por años en otras disciplinas, tales como:

**Contabilidad:** utilizando los registros contables, se realizan análisis razonados, que permiten tomar decisiones más acertadas al momento de realizar una inversión o gasto.

[1] En este módulo no introduciremos formalmente la incertidumbre, sino que solo se tratará de forma conceptual donde corresponda.

**Derecho:** las leyes regulan todo lo relacionado a las ventas, hipotecas, seguros, préstamos, entre muchas otras cosas más, las cuales son calculadas en base a matemáticas financieras.

**Economía:** las matemáticas financieras ayudan a tomar decisiones de dónde poner los recursos para obtener mayores beneficios económicos.

**Ciencia Política:** Ya que estudian y resuelven problemas económicos que tienen que ver con la sociedad, donde existen empresas e instituciones en manos de los gobiernos. Auxiliando a esta disciplina en la toma de decisiones en cuanto a inversiones, presupuestos, ajustes económicos y negociaciones que beneficien a toda la población

# 3. El Valor del Dinero en el Tiempo

## 3.1 ¿Qué es el dinero?

Cuando pensamos en dinero, lo primero que se nos viene a la mente son billetes y monedas. Y es verdad. Pero existen muchas cosas que pueden usadas como el dinero. Por ejemplo, en las cárceles se suele utilizar los cigarros como medio de cambio.

Lo que define al dinero son más bien las funciones que tiene: ser un medio de cambio, una unidad contable y un refugio de valor.

El dinero es un **medio de cambio** que se utiliza para intercambiarlo por bienes y servicios y es aceptado para eso. Esto lleva a que se nos haga mucho más simple adquirir un bien o servicio, en vez de utilizar el trueque buscando a que alguien tenga lo que necesito y quiera lo que tengo como se solía intercambiar hace muchos años atrás.

Es una **unidad contable**, ya que con él podemos determinar el valor de cualquier bien o servicio, en función de la cantidad de dinero. Por ejemplo, en la antigüedad, se valoraba todo en torno a cantidad de camellos.

Finalmente, es un **refugio de valor**, cuando podemos usarlo para ahorrar de forma de conservar la riqueza. Por ejemplo, las casas, departamentos y obras de arte, entre muchos otros más, se utilizan como ahorro ya que generalmente no se desvalorizan con el tiempo, a diferencia del dinero que sí pierde valor, como veremos a continuación.

## 3.2 ¿Cómo cambia el valor del dinero en el tiempo? Inflación y Costo de Oportunidad

El valor del dinero va cambiando con el tiempo. Sólo pensemos cuánto costaba una lata de bebida gaseosa hace 10 años y cuánto cuesta ahora. Por el mismo producto estamos pagando más, porque el valor del dinero va cambiando y los mismos $300 de hace 10 años ya no nos alcanzan para comprar una lata de gaseosa como antes. El aumento sostenido del nivel general de los precios en una economía se denomina **inflación**, y la analizaremos en mayor profundidad más adelante.

Así, cuando queremos invertir en un proyecto, no sólo es importante la rentabilidad del proyecto, sino también la inflación. Veámoslo con un ejemplo.

Si compramos hoy 1 kilo de arroz a $500 para vender en nuestro almacén y esperamos venderlo a $600, podemos pensar que nuestra utilidad es de $100. Pero, si entre hoy y el día que vendemos el kilo de arroz la inflación supera el 20% ($100), obtendremos una pérdida en vez de una ganancia.

Por lo tanto, considerar la inflación cuando queremos analizar un proyecto es muy importante para obtener una evaluación correcta.

Pero la inflación no es el único determinante del valor del dinero en el tiempo. El **costo de oportunidad** también influye en el valor del dinero. Pensémoslo de esta manera: si guardamos $100 en una bolsa y no los gastamos en un año, habríamos perdido todas las oportunidades de inversión que podríamos haber hecho con eso $100 y que nos podrían haber retornado una utilidad. Esta utilidad que perdimos se llama costo de oportunidad. Cuando el dueño del dinero tiene la **oportunidad** de invertir en otros bienes que no solo lo protegerían de la inflación, sino que le podrían generar una utilidad. Así, el valor del dinero en el tiempo no está asignado únicamente por el monto del mismo sino también por el momento en el que se recibe o se gaste y las otras oportunidades de inversión existentes en el momento.

# 4. La Tasa de Interés

La inflación, el costo de oportunidad y muchos otros determinantes, se ven expresados en la tasa de interés.

La tasa de interés es el precio del dinero en el mercado financiero. Al igual que el precio de cualquier producto, cuando hay más liquidez (más dinero) en el mercado la tasa de interés baja y cuando hay escasez sube.

Así, aplicamos este mismo concepto en matemáticas financieras. La tasa de interés es una relación entre la rentabilidad que obtuvimos en un periodo (monto final – capital inicial), y el capital utilizado inicialmente para producirla, cuando adquirimos un activo (un depósito bancario, un bono, etc.) que promete pagos periódicos. Esa ganancia (costo para quien paga esa rentabilidad) es lo que vale haber prestado nuestro dinero y no haber podido usarlo en la adquisición de aquel activo: el costo de oportunidad del dinero.

Veámoslo con un ejemplo. Si invertimos **(P)** $100.000 en un depósito en el banco, y al final del primer año tenemos **(F)** $110.000, la tasa de interés fue de un **(i)** 10%. ¿Cómo lo calculamos?

Interés **(I)** = Monto Final – Monto Inicial = $110.000 - $100.000 = $10.000

Tasa de interés **(r)** = Interés/Monto Inicial = $10.000/$100.000 = 0,1 = 10%

Los $110.000 equivalen a los $100.000 iniciales incrementados por la tasa de interés del 10%, que representa nuestra rentabilidad.

De lo anterior se desprende que, si hacemos un préstamo o una inversión de un capital de **$P**, después de un tiempo **n** tendríamos una cantidad acumulada de **$F**, entonces podemos representar el interés pagado u obtenido, mediante la expresión siguiente:

$$I = \$F - \$P$$

Pero también

$$I = \$P * r * n$$

Analizando la anterior fórmula (esta es la aplicación de interés simple. Se distinguirá más adelante entre esta forma y la más aplicada de interés compuesto), se establece que el interés es una función directa de tres variables: El **capital inicial (P)**, **la tasa de interés (r)** y **el tiempo (n)**. Entre mayor sea alguno de los tres, mayor serán los intereses.  Las razones de la existencia del interés se deben a:

i) El dueño del dinero (prestamista) al cederlo se descapitaliza perdiendo la oportunidad de realizar otras inversiones atractivas (costo de oportunidad).
ii) Cuando se presta el dinero se corre el riesgo de no recuperarlo o perderlo, por lo tanto, el riesgo se toma si existe una compensación atractiva.

iii) El dinero está sujeto a procesos inflacionarios y devaluatorios en cualquier economía, implicando pérdida en el poder adquisitivo de compra.
iv) Quien recibe el dinero en préstamo (prestatario) normalmente obtiene beneficios, por lo cual, es lógico que el propietario del dinero, participe de esas utilidades.

Veamos un poco más en profundidad este concepto.

La tasa de interés mide el valor de los intereses en porcentaje para un período de tiempo determinado. Puede ser anual, semestral, trimestral, mensual o diario.

Por cada $100 se generan intereses por $I al año, semestre, trimestre, mes o día, según el tiempo que se elija. Si la tasa de interés es de 25% anual, significa que por cada cien pesos que se inviertan o se prestan se generarán intereses de $25 cada año o si la tasa de interés es 15% semestral, entonces por cada cien pesos se recibirán o se pagarán $15 cada seis meses, y así según la tasa y tiempo de la tasa.

Matemáticamente, la tasa de interés se puede expresar como la relación que se da entre lo que se recibe de interés **(I)** y la cantidad invertida o prestada **(P):**

$$\boldsymbol{r = \frac{I}{P}}$$

La tasa de interés siempre se presenta en forma porcentual, así: 3% mensual, 15% semestral, 25% anual, pero cuando se usa en cualquier ecuación matemática se trabaja con números decimales: 3% será 0,03; 15% será 0,15 y así según corresponda.

Ejemplo:
Una persona recibe prestada la suma de $2.000 (P) y al cabo de un mes paga $2.050 (F) ¿Cuál es el valor de los intereses y la tasa de interés?

**I** = F - P = $2.050- $2.000 = **$50**

Como r = I / P entonces: r = $50 / $2.000 = 0.025 mensual
**r = 2,5% mensual.**

## 4.1 ¿Para qué utilizamos la tasa de interés?

Como vimos, la tasa de interés representa el costo de oportunidad del dinero. Cuando queremos evaluar un proyecto, debemos utilizar dinero para financiarlo. Ese dinero tiene un costo, que debe ser representado en nuestros cálculos.

Veámoslo con un ejemplo. Si seuna persona quiere vender chocolates que cuestan $100 y se pueden vender a $120 en un mes, pero se desconoce el concepto del costo del dinero, quien toma la decisión pensaría: “Tendré una rentabilidad del 20%”.

Pero si en la economía el dinero tiene un costo o tasa de interés del 25%, quiere decir que los $100 iniciales equivaldrán a $125 dentro de un mes. Así, cuando la persona venda los chocolates, tendrá en realidad una pérdida. Por eso es importante tomar en cuenta este factor, cuando se evalúe algún proyecto o cualquier decisión financiera: el costo del dinero o tasa de interés siempre deberá ser considerado en este tipo de decisiones.

***Nota:*** *en los proyectos que ingresan al S.N.I. se usan proyecciones de flujos sin inflación (flujos reales), y tasa de descuento sin inflación (la tasa social de descuento es real), para evitar la complejidad de pronosticar la tasa de inflación.*

*Existe argumento técnico para realizar esto, y es que el resultado obtenido de esta manera es equivalente que realizar todo proyectando flujos con inflación y descontarlos a una tasa de descuento que considere la inflación.*

## 4.2 Tasa de interés simple y compuesta

Ya vimos el concepto de la tasa de interés y de dónde provenía. Vimos cómo calcularlo, cuando existía solo un periodo de tiempo. Pero, ¿qué pasa cuando el interés se aplica por más de un periodo? Es entonces cuando comenzamos a distinguir dos tasas distintas, la tasa de interés simple y la compuesta.

### *Tasa de interés simple*

Cuando hablamos de tasa de interés simple, nos referimos a que el dinero que obtenemos de la rentabilidad, no lo volvemos a considerar en los siguientes periodos.

Veamos un ejemplo.

Si invertimos $100 por 5 meses a una tasa de interés simple del 10% mensual, vamos a tener

| | Inversión | Mes 1 | Mes 2 | Mes 3 | Mes 4 | Mes 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $100 | | | | | |
| **Interés mensual** | | $10 | $10 | $10 | $10 | $10 |
| **Valor Final** | | $110 | $120 | $130 | $140 | $150 |

Como vemos, la inversión de $100 cada mes nos va rentando la tasa de interés del 10%, por sobre el capital inicial sin considerar que esa rentabilidad de $10 podríamos reinvertirla para el siguiente periodo. Esta es la tasa de interés simple: es la tasa de interés que se aplica al capital inicial en todos los periodos, sin considerar la reinversión de los intereses ganados.

Así, para calcular el valor final de una inversión ($V_F$), multiplicamos la inversión inicial (I) por 1 más la tasa de interés (r) por el número de periodos que estará rentando la inversión (n)

$$V_F = I * (1 + n * r)$$

**¡Ahora hazlo tú!**

Felipe invierte $72.000 en un depósito que paga al 7.5% anual de interés simple por 4 años. ¿Cuánto dinero ganará en intereses?

**Solución**

Primero identificamos los valores correspondientes a P, r, n.
P = 72.000 r = 7.5% = 0.075 n = 4 años
Luego usamos la fórmula.
I = P * r * n
= 72.000*(0.075)*(4) = **$21.600**

**Veámoslo de otra forma usando la fórmula anterior:**

$$\boldsymbol{F = I * (1 + n * r)}$$

F = 72.000 * (1 + 4 * 0,075)
F = 72.000 * (1 + 0,30)
F = 72.000 * (1,30)
F = 93.600

**I = F$ - P$**
I = $93.600 – $72.600
**I = 21.600**

## *Tasa de interés compuesta*

Cuando la inversión considera los intereses ganados en cada periodo para calcular la rentabilidad del mes siguiente, hablamos de interés compuesto.

Siguiendo el mismo ejemplo anterior:

| | Inversión | Mes 1 | Mes 2 | Mes 3 | Mes 4 | Mes 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $100 | | | | | |
| **Interés mensual** | | $10 | $21 | $33 | $46 | $61 |
| **Valor Final** | | $110 | $121 | $133 | $146 | $161 |

Como vemos, el segundo mes no solo hay rentabilidad por los $100 de inversión, sino también por los $10 ganados en el mes 1. Lo mismo ocurre en el mes 2 y así sucesivamente.

Esta fórmula es muy utilizada, por ejemplo, cuando queremos invertir nuestros ahorros por varios meses. Ponemos el dinero en un depósito a plazo por 30 días, ganamos un interés, y luego volvemos a invertir lo que habíamos depositado antes y los intereses, ganando interés sobre los intereses.

Para calcular el valor final de nuestra inversión (F), multiplicamos el capital inicial (I) por 1 más la tasa de interés, elevado a la cantidad de periodos en los que estemos invirtiendo.

$$F = I * (1 + r)^n$$

Veamos un **ejemplo sencillo**.

Felipe deposita $20,000 en un Fondo Mutuo que paga una tasa de 2% de interés anual ¿Cuándo tendrá luego de 24 años?

**Solución**

Debemos identificar P, r y n
P= 20.000, r=0.02, n=24 años

En este caso, como la tasa de interés es anual y son 24 años, estamos hablando de un periodo de 24 años.

**Aplicando la fórmula**

$$F = 20.000 \ * (1 + 0.02)^{24}$$
$$F = 32.168{,}75$$

¿Qué pasa cuando el interés se genera con una frecuencia inferior a la anual? *(otro ejercicio)*

# 5. Valor Futuro y Valor Presente

## 5.1 Valor Futuro

Cuando hacemos una inversión, queremos saber ahora cuánto va a ser el valor de la inversión en el futuro. A esto le llamamos el valor futuro.

Su cálculo va a depender de cómo esté compuesta la inversión que estamos haciendo, sus tasas de interés, aportes o retiros que podamos hacer durante el periodo de inversión, y cualquier otro factor que afecte el valor final de nuestra inversión.

Si tenemos una inversión simple, con una sola tasa de interés simple, sin retiros o abonos posteriores, simplemente vamos a calcular el valor futuro ($V_f$) con la fórmula que aprendimos anteriormente para calcular el capital final con interés simple:

$$V_f = I * (1 + r * n)$$

Veámoslo con un ejemplo. Vamos a depositar nuestros ahorros de $500.000 por 6 meses en el banco, que nos ofrece una tasa del interés simple de 12% anual ¿Cuál será el valor al finalizar los 6 meses?

Primero debemos calcular cual es la tasa mensual, ya que nosotros necesitamos una tasa para 6 meses, no para 12. Como es una tasa simple, solo debemos dividir la tasa de interés del año en 12 meses, es decir, 12% en 12, lo que nos da una tasa de interés mensual de 1%. Con esto ya tenemos todo lo necesario para hacer el cálculo:

I = $500.000
r= 1% = 0.01
n= 6

$$V_f = 500.000 * (1 + 0.01 * 6)$$
$$V_f = 530.000$$

Y si el interés es compuesto, el valor futuro ($V_f$) de esa inversión será la fórmula que aprendimos usando tasa de interés compuesta

$$V_f = I * (1 + r)^n$$

Sigamos con el mismo ejemplo. Nuestros mismos ahorros de $500.000 por 6 meses en el banco, con la misma tasa de interés 12% anual, pero esta vez con tasa de interés compuesta ¿Cuál será el valor al finalizar los 6 meses?

I = $500.000
r= 1% = 0.01
n= 6

$$V_f = 500.000 * (1 + 0.01)^6$$
$$V_f = 530.760$$

La tasa "r" usada corresponde al valor de la tasa de interés anual dividida en 12 meses, para obtener la tasa de interés mensual, esto es:

r = 12%/12 = 1%

La manera en que calculemos el valor futuro, va a depender del tipo de inversión que estemos haciendo y los diversos factores involucrados en esta.

## 5.2 Valor Presente

El valor presente de una inversión, es el capital actual que tengo que invertir para tener cierto valor en el futuro una vez terminada la inversión. En pocas palabras, es el inverso del valor futuro.

Para una inversión con tasa de interés simple, tenemos que el valor presente de la inversión es:

$$V_p = \frac{F}{(1 + r * n)}$$

Siguiendo el mismo ejemplo anterior. Sabemos que el valor final es $530.000, por 6 meses a una tasa de 1% simple. Apliquemos la fórmula para traer a valor presente esta inversión:

$V_f$ = $530.000
r= 1% = 0.01
n= 6

$$V_p = \frac{530.000}{(1 + 0.01 * 6)}$$

$$V_p = 500.000$$

Y cuando utilizamos una tasa de interés compuesto:

$$V_p = \frac{F}{(1 + r)^n}$$

Siguiendo el mismo ejemplo anterior. Sabemos que el valor final es $530.760, por 6 meses a una tasa de 1% compuesta. Apliquemos la fórmula para traer a valor presente esta inversión:

$V_f$ = $530.760
r= 1% = 0.01
n= 6

$$V_p = \frac{530.760}{(1 + 0.01)^6}$$

$$V_p = 500.000$$

## 6. Tasa de Interés Equivalente

Cuando queremos comparar una tasa de interés con otra, es muy simple cuando las tasas son para un mismo periodo. Por ejemplo, sabemos que es mejor un interés del 8% mensual, que un 6% mensual. Pero ¿qué pasa si debo comparar tasas de periodos diferentes, como una mensual con una anual? Para esto debemos llevarlas todas a un mismo periodo.

Cuando estamos hablando de interés simple, solo basta con multiplicar la tasa para el periodo que necesitamos.

Por ejemplo, si tenemos una tasa del 2% mensual y queremos saber la rentabilidad anual, basta con multiplicar la tasa del 2% mensual por los 12 meses del año, es decir, 24%.

Pero cuando hablamos de interés compuesto, significa que se generan intereses por sobre los intereses, por lo que el cálculo se vuelve un poco más complejo.

Para eso, aplicamos la fórmula:

$$r_f = (1 + r_a)^n - 1$$

Veámoslo con un ejemplo:

Tenemos una tasa compuesta mensual de 2%. ¿Cuál será la tasa anual?

$$r_f = (1 + 0{,}02)^{12} - 1$$

$$r_f = 0.2682 = 26{,}82\%$$

Y si tenemos la tasa de interés anual final, ¿Cómo calculamos la tasa mensual? Aplicamos la fórmula:

$$r_a = (1 + r_f)^{\frac{1}{n}} - 1$$

Siguiendo con el mismo ejemplo:

Tenemos una tasa final anual de 26.82%. ¿Cuál será la tasa mensual?

$$r_a = (1 + 0{,}2682)^{\frac{1}{12}} - 1$$

$$r_a = 0.2 = 2\%$$

Como vemos, podemos calcular tanto tasas mensuales basados en la tasa anual final como esta última basados en la tasa mensual compuesta.

Veamos otro caso. Si queremos saber cuál es la tasa de interés final ($r_f$) de una tasa de interés nominal ($r_a$) del 24% anual con interés compuesto (esto es, si el interés se capitaliza mensualmente), debemos aplicar la siguiente formula:

$$r_f = \left(1 + \frac{r_a}{n}\right)^n - 1$$

donde n es en este caso 12, porque el año tiene 12 meses y los intereses de la tasa son mensuales.

Para este caso, donde tenemos una inversión mensual por 12 meses, con una tasa nominal del 24%, quedaría:

$$r_f = \left(1 + \frac{0.24}{12}\right)^{12} - 1$$

$$r_f = 0.2682 = 26{,}82\%$$

Este ejemplo se hace extensivo a cualquier unidad de tiempo, por ejemplo, para obtener equivalencias de…

- Tasa anual con tasa diaria
- Tasa mensual con tasa diaria
- Tasa anual con tasa trimestral
- Tasa trimestral con tasa mensual

Esto también nos permitirá comparar tasas y resolver preguntas como ¿Qué es mejor, una inversión con un interés simple anual del 15% o una compuesta del 12%?

**¡Ahora hazlo tú!**

Jorge quiere hacer un depósito a plazo, pero no sabe por cuál de dos opciones decidir. El Banco Establo le ofrece una tasa anual nominal del 40%, de capitalización simple mensual. Por otro lado, el Banco VVBA le ofrece un 36% de interés anual nominal de capitalización compuesta mensual ¿Qué banco le conviene más?

**Solución**

Sabemos que la tasa del 40% es finalmente la que Jorge obtendrá porque es un interés simple. Pero como la tasa del 36% es compuesta, no sabemos cuándo será finalmente la rentabilidad debido a que se aplican interés sobre intereses. Para esto aplicamos nuestra fórmula:

$$r_f = \left(1 + \frac{0.36}{12}\right)^{12} - 1$$

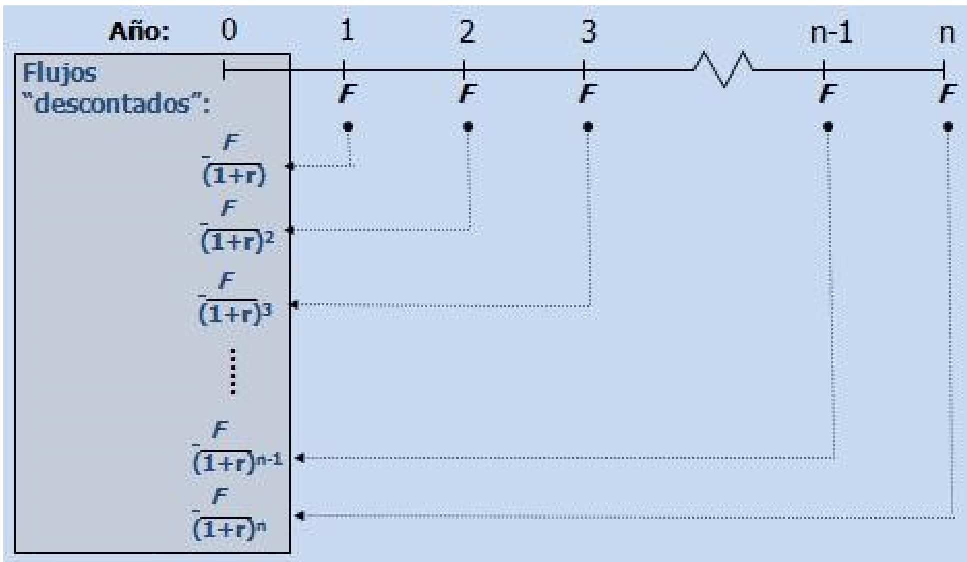
$$r_f = 42.58\%$$

Como vemos, es mejor la tasa del Banco VVBA, ya que nos entregará una rentabilidad del 42,58% que es más que el 40% del Banco Establo.

## 7. Anualidades

Como vimos anteriormente, un flujo futuro va a depender de muchas variables y depende de éstas la manera en que realicemos cualquier cálculo. Pero muchas veces, la estructura del flujo permite su cálculo de una forma más directa. Este es el caso de las anualidades, en el que todos los pagos del flujo son iguales y en el mismo intervalo de tiempo. Por ejemplo, todos los meses recibir $50.000.

Sea "n" el número de periodos que recibiremos el pago, "r" la tasa de interés y "F" el monto del pago, una anualidad puede ser vista así:




Flujos descontados son los que están expresados como valor actual (año 0). Se ha utilizado para cada flujo "F" la fórmula de valor actual presentada anteriormente.

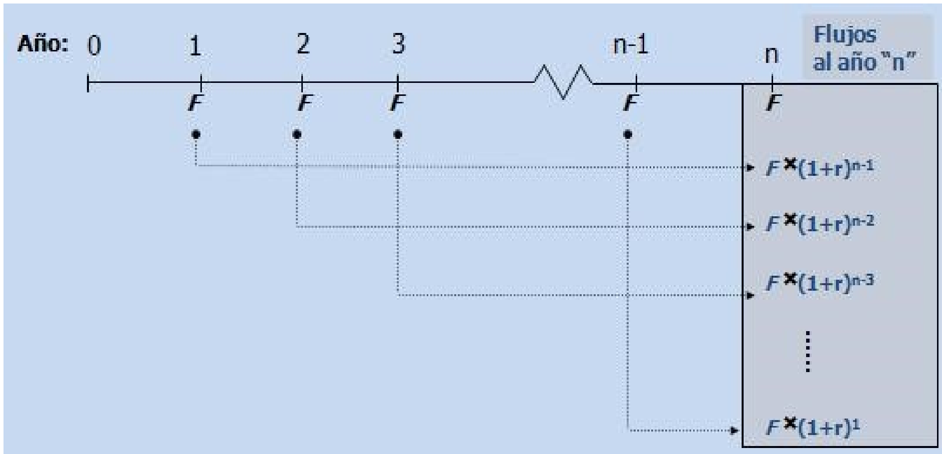
El Valor presente de esa anualidad que implica la suma de todos esos flujos actualizados al momento 0 se define como:

$$V_p = F\frac{1}{(1+r)^1} + F\frac{1}{(1+r)^2} + F\frac{1}{(1+r)^3} + \cdots + F\frac{1}{(1+r)^n}$$

Esta fórmula expresa la suma de los valores actuales de cada monto "F". Es el valor actual de la anualidad.

$$\text{Fórmula abreviada: } V_p = \frac{F}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right)$$

Ya vimos como calcular el valor presente de una anualidad. Ahora podemos también calcular el valor futuro.




Flujos al año n corresponden al valor futuro en el año n de cada monto F.

Veamos un ejemplo. Para comprar una casa se solicita un préstamo hipotecario al banco, que exige el 25% al contado y le otorga un plazo de 20 años para pagar los dividendos mensuales a una tasa anual efectiva del 8%. ¿Cuál es el valor del dividendo para una casa de UF 2.000?

**Solución**

Si la casa vale UF 2.000, pero solo pagaremos el 75% en dividendos ya que el 25% debe ser al contado, el valor total de la hipoteca será de UF 1.500 (2.000*75%).

Sabemos que la tasa anual es de 8%, por lo que dividimos los pagos en 20 años (1.500/20 = 75).

$$V_p = \frac{75}{0.08}(1 - \frac{1}{(1+0.08)^{20}})$$

$$V_p = 736{,}36$$

Este es el valor presente de todos los pagos, por lo que debemos dividirlo en 12 meses para obtener el pago del dividendo mensual.

$$\text{Dividendo mensual} = \frac{736{,}36}{12} = UF\ 61{,}36$$

El **Valor Futuro** de una anualidad (F) que implica la suma de todos esos flujos llevados al periodo **n** y se define como:

$$V_f = F(1+r)^n + F(1+r)^{n-1} + \cdots + F$$

Y resolviendo esta serie con la constante F queda de la siguiente manera:

$$\text{Fórmula abreviada: } V_f = F * \left(\frac{(1+r)^n - 1}{r}\right)$$

El Valor Futuro "**Vf**" en este caso corresponde al valor que se obtendría al cabo de **n** períodos si se ahorrara una suma constante por período de monto **F**, depositando dicho valor a una tasa de interés **r**.

Veamos un ejemplo. Una persona desea hacer hoy un depósito de $50.000 en un banco, con el propósito de continuar efectuando 10 depósitos adicionales anuales por el mismo monto, el primero de ellos dentro de 1 año.

Si el banco le paga 10% anual, ¿Cuánto retirará al momento del último depósito?

**Solución**

Sabemos que la tasa anual efectiva es del 10% y que hará 10 depósitos adicionales al inicial, por lo que la cantidad de períodos a considerar serán 11. Utilizando la fórmula de valor futuro tendríamos:

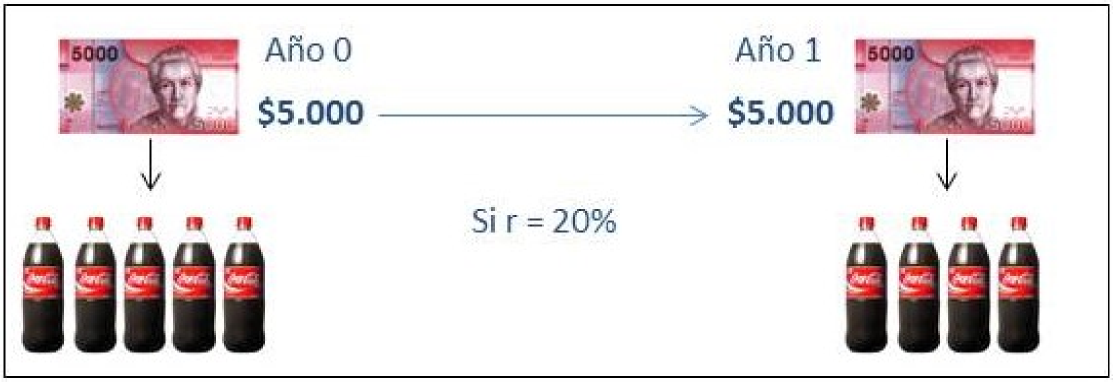
$$V_f = 50000 * (\frac{(1+0{,}1)^{11}-1}{0{,}1})$$

$$V_f = \$926.558$$

Este es el monto obtenido al momento de efectuar el último depósito. Es decir, luego de realizar 11 depósitos anuales iguales, por un valor de $50.000 cada uno a una tasa de 10% semestral, la persona tendrá un total de $926.558.

## 8. Inflación

Al comenzar, ya hablamos un poco acerca de la inflación. La inflación es el aumento sostenido en el nivel general de precios. Normalmente es medida a través del cambio en el Índice de Precios al Consumidor (IPC).




Como se ve en la gráfica, si con $5.000 hoy se compra 5 unidades, se podrán comprar solo 4 unidades con los mismos $5.000 dentro de un año, si la inflación durante el transcurso del año es de 20% (se pierde un 20% del poder adquisitivo, por lo que luego se puede comprar solo un 80% de lo que antes se compraba con el mismo monto).

En presencia de inflación (π), la capacidad de compra o poder adquisitivo de un monto de dinero es mayor hoy que en el futuro.

Si se asume que no hay riesgo, la tasa de interés observada se explica por 2 elementos:

- Costo de oportunidad (tasa interés real)
- Cambio del poder adquisitivo (inflación)

Donde:

**Tasa Real:** Valora costo de oportunidad.
**Tasa Nominal:** Valora costo de oportunidad y además mantiene el poder adquisitivo

**Tasa de interés nominal = Tasa de interés real + inflación**

## 9. Introducción a la Evaluación de Proyectos

¿Sabes cómo decidir sobre la conveniencia de realizar un proyecto?

Para responder a esa pregunta se debe considerar una serie de criterios basados en los resultados de indicadores derivados de la aplicación de la matemática financiera.

**Indicadores:**

Los indicadores de evaluación de proyectos ayudan a:

- Determinar la rentabilidad de un proyecto.
- Decidir si un proyecto es o no conveniente para un inversionista.
- Priorizar o jerarquizar (ordenar) los proyectos de una cartera de inversión.
- Optimizar distintas decisiones relevantes del proyecto (ubicación, tecnología, momento óptimo para invertir o abandonar, etc.)

Los indicadores más usados para evaluar decisiones económicas son los siguientes:

- Valor Actual Neto
- Valor Actual de los Costos
- Tasa Interna de Retorno
- Valor Anual Equivalente
- Costo Anual Equivalente
- Razón VAN / Inversión inicial

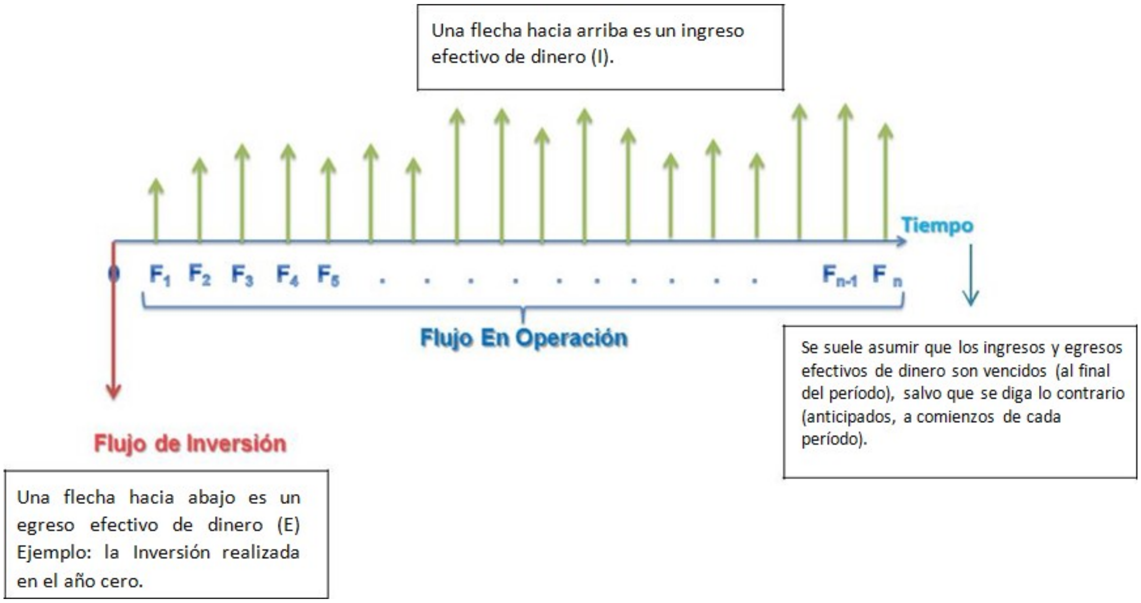
## Criterios:

Los criterios de decisión van ligados a los posibles valores que tomen los indicadores, permitiendo optar por realizar o no un proyecto, o entre distintas alternativas.

## 9.1 Definiciones básicas

Las variables mínimas necesarias para la obtención de un indicador de rentabilidad son:

- **Flujo de caja del proyecto ($F_t$).** Éste es un **horizonte de tiempo** en el cual se **registran ingresos y egresos efectivos** de dinero justo en el momento en que ocurren. Se deben considerar todos los ingresos y egresos involucrados en el proyecto en cada período.
  Éste nos permite facilitar la comprensión de las equivalencias entre valores presentes y valores futuros en cualquier instante de tiempo.




- **La tasa de descuento o costo de oportunidad del capital (r).** Corresponde a la rentabilidad que se le exigirá al proyecto, la que podrá variar dependiendo del sector en que se invierte, nivel de riesgo (a mayor riesgo se exige mayor rentabilidad), tipo de financiamiento utilizado, etc…
  * Al tener distintos proyectos con el mismo nivel de riesgo, el costo de oportunidad a considerar para una inversión será la rentabilidad que ofrece el capital invertido en el mejor de los proyectos alternativos.

- **El horizonte de evaluación (n).** Es un plazo de tiempo para el cual resulta factible proyectar, con una razonable confianza, los flujos que generará una inversión. Puede ser igual o inferior a la vida útil de la inversión. Queda determinado por las características del proyecto. Generalmente se determina por la vida útil del activo de mayor vida útil que compone el proyecto.

- **Vida útil:** Es la duración que se le asigna a un bien como elemento de provecho para una entidad. Las bases utilizadas para la determinación de la vida útil son: a) tiempo (años), o b) capacidad de producción. La elección de la base dependerá de la característica del bien y del uso que se le dará

# 10. Indicadores

## 10.1 Valor Actual Neto (VAN)

Es un procedimiento que permite calcular el valor presente de un determinado número de flujos de caja futuros, originados por una inversión, restando esta última.
La metodología consiste en descontar (mediante una tasa "r") al momento actual ($t_0$) todos los flujos de caja futuros, para así poderlos comparar con la inversión inicial.

Es una medida del valor neto que aporta una inversión a lo largo de toda su vida. Para un inversionista, representa el incremento en su riqueza que generaría realizar una inversión, mientras que en una evaluación social, muestra el valor económico que genera para el país la inversión.

**Flujos de Ingresos / Gastos**

El VAN es la suma en un período fijo de los flujos futuros expresados, mediante la aplicación de la tasa de descuento, en valores actuales. En cada período se debe obtener el flujo neto (Ingresos – Egresos), que será el monto a considerar.

La fórmula para calcular el VAN entonces está dada por los flujos netos en cada período, la tasa de descuento y la inversión inicial.

$$VAN = -I_0 + \sum_{n}^{t=1} \frac{F^t}{(1+r)^t}$$

En donde:

*$F_t$ = ($I_t$ – $E_t$) = Flujo neto al final del periodo t*
*$I_0$ = Inversión inicial*
*r = costo de capital (tasa de descuento)*
*n = número de periodos*

Una vez tenemos todos los flujos en el período inicial, podemos ver el aumento o disminución de la riqueza al participar en un proyecto.

***Ventajas***

El VAN tiene muchas ventajas como indicador para la toma de decisiones de inversión:

- Reconoce que un peso hoy vale más que un peso mañana
- Su cálculo es muy simple. Depende únicamente del flujo de caja y del costo de oportunidad

No sólo permite reconocer un proyecto bueno, sino que también permite comparar proyectos que tengan la misma vida útil (debe elegirse aquel con mayor VAN).

Veamos un ejemplo:

La construcción del puente La Beca requiere una inversión inicial de $1.000. Tendrá una durabilidad de 4 años y debe considerarse una tasa de costo de oportunidad del 20%. Los beneficios netos para el primer año son de 350, el segundo 380, el tercero 400 y el cuarto 500. Calcular el Valor Actual Neto y recomendar al Estado si la inversión es rentable o no.

$$VAN = -I_0 + \sum_{n}^{t=1} \frac{F^t}{(1+r)^t}$$

$$VAN = -1000 + \frac{350}{1{,}2^1} + \frac{380}{1{,}2^2} + \frac{400}{1{,}2^3} + \frac{500}{1{,}2^4}$$

$$VAN = -1000 + 291{,}67 + 263{,}89 + 231{,}48 + 241{,}13 = 28{,}16$$

Esto significa que los beneficios del proyecto superan a sus costos en 28,16 (incluido el costo de oportunidad de los recursos usados), por lo que es recomendable realizarlo.

En base al resultado del VAN decidiremos si invertir o no en el proyecto. Los criterios son los siguientes:

| Resultado | Riqueza | Decisión |
|---|---|---|
| VAN < 0 | Disminuye | Proyecto no conveniente |
| VAN = 0 | Igual | La decisión es indiferente |
| VAN > 0 | Aumenta | Proyecto es conveniente |

Un <u>VAN positivo</u> de valor “X”, implícitamente implica:

- La recuperación de lo invertido en el proyecto.
- La recuperación del costo alternativo de lo invertido en el proyecto.
- Un valor de "X" por sobre lo recuperado, expresado en valor presente.

Un Van 0, implica sólo:

- La recuperación de lo invertido en el proyecto.
- La recuperación del costo alternativo de lo invertido en el proyecto.
- En esta situación la decisión debería basarse en otros criterios, como la obtención de un mejor posicionamiento en el mercado u otros factores.

Un VAN negativo no alcanza a recuperar el costo alternativo de lo invertido en el proyecto, o tampoco los costos explícitos.

## 10.2 Valor Actual Costos (VAC)

Como su nombre lo dice, VAC es un indicador de costos. Su metodología es igual a la del VAN, pero sólo considera los costos en cada flujo.
Se utiliza mucho para proyectos sociales, en los que se aplica un enfoque Costo/Eficiencia. En estos casos, el objetivo de la evaluación es identificar aquella alternativa de solución que presente el mínimo costo, para los mismos beneficios. Este enfoque se aplica cuando existe dificultad para cuantificar y/o valorar los beneficios del proyecto, especialmente cuando esto conlleva la aplicación de juicios de valor.

$$\mathrm{VAC} = I_0 + \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+r)^t}$$

En donde:

$C_t$ = Egresos/Costos al final del periodo
$I_0$ = Inversión inicial
r = costo de capital (tasa de descuento)
n = número de periodos

## 10.3 Tasa Interna de Retorno (TIR)

La TIR es aquella tasa que hace el VAN igual a cero, es decir, la tasa de interés por medio de la cual se recupera la inversión.

$$VAN = -I_0 + \sum_{t=1}^{n} \frac{F_t}{(1+TIR)^t} = 0$$

En donde:

*$F_t = (I_t - E_t)$ = Flujo neto al final del periodo*
$I_0$ = Inversión inicial
n = número de periodos

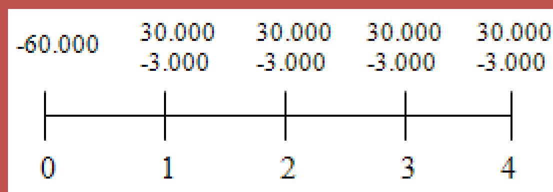
**Criterio de decisión**: un proyecto es conveniente si la TIR es mayor que el costo de oportunidad del capital o tasa de descuento. A mayor TIR, mayor rentabilidad.

$\boxed{\textbf{\textit{TIR > r}}}$

Su cálculo a mano es bastante complejo, sobre todo para proyectos en los que se consideran muchos períodos, pudiéndose realizar analíticamente o bien a "prueba y error". Sin embargo, utilizando herramientas como Excel se puede calcular rápidamente.

Veamos un **ejemplo**:

Consideremos una persona que va a montar un negocio que necesita una inversión inicial de $60.000, y que luego va a tener unos gastos anuales de mantenimiento de $3.000 y unos ingresos anuales de $30.000, durante 4 años. El esquema de flujos sería el siguiente:




Para determinar la TIR de este proyecto de inversión, tenemos que ir probando con distintos tipos de interés hasta que la suma financiera de todos los capitales sea cero, es decir, igualar el VAN a cero.

$$-60000 + \frac{27000}{(1+TIR)^1} + \frac{27000}{(1+TIR)^2} + \frac{27000}{(1+TIR)^3} + \frac{27000}{(1+TIR)^4} = 0$$

Para sumar estos capitales de manera correcta, tenemos que desplazarlos todos hasta el mismo instante de tiempo, por ejemplo en 0. El siguiente cuadro nos muestra los resultados:

| Año | Ingresos | Gastos | Valor neto (I-G) | Valor en 0 del valor neto con el tipo de interés: | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 5% | 10% | 20% | 25% | 28,49% |
| 0 | 0 | 60.000 | -60.000 | -60.000 | -60.000 | -60.000 | -60.000 | **-60.000** |
| 1 | 30.000 | 3.000 | 27.000 | 25.714 | 24.545 | 22.500 | 21.600 | **21.013** |
| 2 | 30.000 | 3.000 | 27.000 | 24.490 | 22.314 | 18.750 | 17.280 | **16.354** |
| 3 | 30.000 | 3.000 | 27.000 | 23.324 | 20.285 | 15.625 | 13.824 | **12.728** |
| 4 | 30.000 | 3.000 | 27.000 | 22.213 | 18.441 | 13.021 | 11.059 | **9.905** |
| **SUMA TOTAL** | | | | **35.741** | **25.586** | **9.896** | **3.763** | **0** |

Como vemos en el cuadro, se prueba la suma financiera de ingresos y gastos con diferentes tasas hasta conseguir, con un tipo de interés anual de 28,49%, que la suma sea 0. Por tanto la TIR sería del 28,49%. En otras palabras, con una tasa de descuento menor a 28,49% obtendremos un VAN positivo.

El mismo cálculo se puede hacer en Excel de manera muy sencilla. Sólo debemos registrar los flujos netos de cada período de manera consecutiva y luego aplicar la fórmula TIR (o IRR en inglés)

| Año | Ingresos | Gastos | Flujo Neto |
|---|---|---|---|
| 0 | $ - | $-60.000 | $ -60.000 |
| 1 | $30.000 | $ -3.000 | $ 27.000 |
| 2 | $30.000 | $ -3.000 | $ 27.000 |
| 3 | $30.000 | $ -3.000 | $ 27.000 |
| 4 | $30.000 | $ -3.000 | $ 27.000 |

**TIR = 28,49%**

Hay que tener presente que la TIR tiene algunos defectos como criterio de decisión:

- **Puede haber más de una TIR.** Sucede para proyectos donde los flujos cambian de signo más de una vez, ya que se obtiene más de una solución para el indicador. En tales casos se desestima su uso.
- **Proyectos para los que no existe TIR.** En estos casos se debe utilizar otros indicadores para la toma de decisión.
- **Puede diferir del VAN.** Pueden haber casos en los que el Proyecto A tiene mayor TIR que el Proyecto B, pero menor VAN.

| Proyecto | $I_0$ | $F_1$ | TIR | $VAN_{6\%}$ |
|---|---|---|---|---|
| A | -1.000 | 2.000 | **100%** | 887,7 |
| B | -20.000 | 25.000 | 25% | **3.585,1** |

¿Cuál proyecto es mejor? El proyecto A tiene mayor VAN y por tanto es mejor. Sin embargo, tiene menor TIR, lo que podría inducir a un error.

## 10.4 Valor Anual Equivalente

La decisión de invertir o no nuestros fondos en determinado proyecto, como hemos comentado con anterioridad, la podemos tomar en base al cálculo del Valor Presente Neto (VPN, otra manera de denominar al VAN), que es la variable que nos permite determinar si obtendremos o no rentabilidad por nuestro dinero. El VAN lo podemos utilizar bajo el supuesto de que solo tenemos una alternativa de inversión o para decidir entre dos proyectos con el mismo horizonte temporal.

¿Pero, qué pasa cuando nos enfrentamos a un escenario con **dos opciones con horizontes temporales diferentes**? En este caso el VAN no nos permitirá tomar la decisión adecuada y tendremos que recurrir al cálculo del Valor Anual Equivalente o VAE.

Este método consiste en calcular el rendimiento anual uniforme que genera la inversión en un proyecto durante un período determinado. Para calcular el VAE utilizamos la siguiente formula:

$$VAE = VAN \times \frac{r \times (1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

En donde:

VAN = Valor Actual Neto
r = costo de capital (tasa de descuento)
n = número de periodos

Para su cálculo entonces se aplica al VAN del proyecto el Factor de Recuperación del Capital, de modo de distribuir el VAN de cada proyecto de acuerdo con la tasa de descuento (**r**), en **n** cuotas iguales, siendo **n** el número de períodos de vida útil del proyecto.

Veamos un **ejemplo** que te permitirá entender el uso del VAE:

Supongamos que nos encontramos ante dos posibles proyectos y pensamos elegir uno para invertir nuestros ahorros de 100 unidades monetarias:

El primer proyecto (P1) es a 4 años y genera un flujo de caja de 50, 70, 80 y 100 en cada uno de estos períodos.

El segundo proyecto (P2) es a 5 años con flujos de efectivo de 45, 50, 60, 70 y 100 respectivamente.

Adicionalmente la tasa de descuento que utilizaremos para ambos será del 10%.

Lo primero será construir los flujos de cada proyecto.

| P1 | $I_0$ | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | -100 | 50 | 70 | 80 | 100 |

| P2 | $I_0$ | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ | $F_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | -100 | 45 | 50 | 60 | 70 | 100 |

Posteriormente, calculamos el VAN de cada uno
$VAN_{(P1)}$ = 131,71
$VAN_{(P2)}$ = 137,21

Si nos guiáramos por el criterio del valor presente neto para decidir en qué proyecto invertir, indiscutiblemente elegiríamos el número 2 al tener este un mayor VAN. Sin embargo, veamos que pasa al calcular el VAE.

El VAE del proyecto 1 es igual a:

$$VAE = 131{,}71 \times \frac{0{,}1 \times (1{,}1)^4}{(1{,}1)^4 - 1}$$

$$VAE = 131{,}71 \times 0{,}315471$$

$$VAE_{P1} = 41{,}55$$

El VAE del proyecto 2 es igual a:

$$VAE = 137{,}21 \times \frac{0{,}1 \times (1{,}1)^5}{(1{,}1)^5 - 1}$$

$$VAE = 137{,}21 \times 0{,}263797$$

$$VAE_{P2} = 36{,}19$$

Como podemos observar, el valor anual equivalente del proyecto 1 es mayor al del proyecto 2, lo que nos indica que el primero es más rentable y debería ser la opción que elijamos para invertir. Este resultado contrasta con el obtenido anteriormente al calcular el valor presente neto de cada proyecto, ya que si nos hubiésemos guiado por el criterio de selección del mayor VAN hubiésemos tomado una decisión errónea favoreciendo al proyecto menos rentable.

Otra forma en que se puede comparar ambos proyectos es repetir los flujos de los proyectos hasta que finalicen en conjunto en el mismo periodo (es decir, buscando el mínimo común múltiplo entre sus vidas útiles). Calcular el VAN de esos nuevos flujos, y seleccionar el proyecto con mayor VAN. Para hacer esto, se deben tener ciertas consideraciones base:

- Los proyectos pueden repetirse
- Los proyectos pueden repetirse bajo iguales condiciones de rentabilidad, es decir, no cambia la proyección de flujos

## 10.5 Costo Anual Equivalente

CAE es un indicador de costos. Su metodología es igual a la del VAE, pero sólo considera los costos en cada flujo.
Se utiliza en proyectos que poseen beneficios que, siendo similares, no son posibles de valorar, como proyectos de salud y educación, entre otros.

$$CAE = VAC \times \frac{r \times (1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

En donde:

VAC = Valor Actual de Costos
r = costo de capital (tasa de descuento)
n = número de periodos

Al igual que en el caso del VAE, este indicador se debe considerar por tanto, para comparar proyectos de distinta vida útil, repetibles bajo las mismas condiciones, con beneficios similares (por ejemplo, alternativas de proyectos que permitan educar al mismo número de niños al año, o entregar el mismo número de atenciones de salud al año, etc.)

### 10.6 Razón VAN/Inversión (IVAN)

El IVAN permite priorizar proyectos cuando existe racionamiento de fondos. Indica cuánto es el VAN logrado por unidad monetaria invertida.

$$\mathrm{IVAN} = \frac{VAN}{I_0}$$

En donde:
$I_0$ = Inversión inicial

La mejor forma de ver la utilización del indicador es con un ejemplo, en el cual se cuenta con restricción presupuestaria para asignar a la ejecución de proyectos.

Veámoslo con un ejemplo:

Una institución ha elaborado su cartera de proyectos, los cuales ya han sido evaluados individualmente, sin embargo, su presupuesto de MM$2.000 no alcanza para ejecutarlos todos.

| Proyecto | VAN | Inversión |
|---|---|---|
| A | 552 | 1.280 |
| B | 214 | 310 |
| C | 655 | 780 |
| D | 360 | 250 |
| E | 97 | 95 |
| F | 743 | 750 |
| G | 121 | 95 |
| H | 488 | 956 |

*¿A cuáles proyectos convendría dar financiamiento?*

*Solución:*

Se deben ordenar los proyectos de mayor a menor **IVAN**

| Proyecto | VAN | Inversión | IVAN | Inversión Acumulada |
|---|---|---|---|---|
| D | 360 | 250 | 1,44 | 250 |
| G | 121 | 95 | 1,27 | 345 |
| E | 97 | 95 | 1,02 | 440 |
| F | 743 | 750 | 0,99 | 1.190 |
| C | 655 | 780 | 0,83 | 1.970 |
| B | 2[illegible] | [illegible] | [illegible] | 2.280 |
| H | 488 | 956 | 0,51 | 3.236 |
| A | 552 | 1.280 | 0,43 | 4.516 |

Convendría realizar los proyectos D, G, E, F y C

Se toman los proyectos de mayor IVAN primero, y se van agregando uno a uno a la cartera de inversiones los proyectos que tienen menor IVAN, hasta que el monto acumulado se ajuste al presupuesto para invertir.